Ad-Soyad :

Numara : Cevap Anahtarı

MAT 103 Lineer Cebir I Ara Sınav Soruları 28.11.2020

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Mümkünse cevaplarınızı PDF dosyasına dönüştürerek gönderiniz. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazarak cevaplayınız.

(D) Bir grupta birim elemanın tersi kendisidir.

(Y) G değişmeli grup ise $\forall x \in G$ için $x^{-1} = x$ dir.

(Y) $(G,*)$ değişmeli olmayan bir grup olsun. Bu durumda, $\forall x, y \in G$ için $x * y \neq y * x$ dir.

(Y) Bir küme bir işleme göre kapalı (işlem iç işlem) ise her elemanın tersi vardır.

(Y) Karesi kendisine eşit olan eleman birim elemandır.

2) $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x * y = x + y + 1$ olarak tanımlanan işlem ile birlikte $(\mathbb{Z},*)$ ikilisinin bir grup olup olmadığını araştırınız.

3) $A = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$ kümesinin bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}$ reel sayılar halkasının bir alt halkası olduğunu gösteriniz.

4) $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, z = 0\}$ kümesinin bilinen toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olup olmadığını araştırınız.

5) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ kümesinin

a) Toplama işlemine göre kapalı olmadığını gösteriniz,

b) Skalerle çarpma işlemine göre kapalı olup olmadığını araştırınız.

Cevaplar

2) $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ olduğunu biliyoruz.

<u>Kapalılık:</u> $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $x * y = x+y+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\mathbb{Z}, *)$ kapalı.

<u>Birleşme:</u> $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$ için

$$\left.\begin{array}{l} x*(y*z) = x*(y+z+1) = x+(y+z+1)+1 = x+y+z+2 \\ (x*y)*z = (x+y+1)*z = (x+y+1)+z+1 = x+y+z+2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x*(y*z)=(x*y)*z \\ \Rightarrow \text{Birleşme özelliği} \\ \text{sağlanır.} \end{array}$$

<u>Birim elemanı:</u> $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x*e = e*x = x$ olacak şekilde $e \in \mathbb{Z}$ var mı?

$$\left.\begin{array}{l} x*e = x \Leftrightarrow x+e+1 = x \Leftrightarrow e=-1 \in \mathbb{Z} \\ e*x = x \Leftrightarrow e+x+1 = x \Leftrightarrow e=-1 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} e=-1 \text{ birim eleman}$$

<u>Ters elemanı:</u> $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x*x^{-1} = x^{-1}*x = -1$ olacak şekilde $x^{-1} \in \mathbb{Z}$ var mı?

$$\left.\begin{array}{l} x*x^{-1} = -1 \Leftrightarrow x+x^{-1}+1 = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = -2-x \in \mathbb{Z} \\ x^{-1}*x = -1 \Leftrightarrow x^{-1}+x+1 = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = -2-x \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \in \mathbb{Z} \text{ için} \\ x^{-1} = -2-x \\ \text{ters eleman} \end{array}$$

$\therefore$ $(\mathbb{Z}, *)$ ikilisi bir gruptur.

3) <u>$A \neq \emptyset$:</u> $a=b=0 \in \mathbb{Q}$ için $a+b\sqrt{2} = 0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

<u>$A \subset \mathbb{R}$:</u> $\forall a+b\sqrt{2} \in A$ için $a,b \in \mathbb{Q}$ olup $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow A \subset \mathbb{R}$.

$\forall x = a_1+b_1\sqrt{2},\ y = a_2+b_2\sqrt{2} \in A$ alalım.

<u>$x+y^{-1} \in A$ mı?</u> $y \in A$ için $y^{-1} = -a_2 - b_2\sqrt{2} = \underbrace{-a_2}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(-b_2)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2} \in A$ dır.

$$x+y^{-1} = (a_1+b_1\sqrt{2}) + (-a_2-b_2\sqrt{2}) = \underbrace{(a_1-a_2)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(b_1-b_2)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2} \in A$$

<u>$xy \in A$ mı?</u> $xy = (a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2}) = \underbrace{a_1a_2+2b_1b_2}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(a_1b_2+a_2b_1)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2}$

$$\Rightarrow xy \in A$$

$\therefore$ A, $\mathbb{R}$ nin alt halkasıdır.

4) $V \neq \emptyset$: $(0,0,0) \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$.

$V \subset \mathbb{R}^3$ olduğundan V nin $\mathbb{R}^3$ ün bir alt vektör uzayı olduğunu gösterirsek her alt vektör uzayı, tanımından kendi başına bir vektör uzayı olacağından V bir vektör uzayı olur.

$\forall (x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0) \in V$, $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$c(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (\underbrace{cx_1 + x_2}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{cy_1 + y_2}_{\in \mathbb{R}}, 0) \in V$$

$\Rightarrow V$, $\mathbb{R}^3$ ün bir alt vektör uzayıdır.

$\Rightarrow V$; $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

5) a) $a = (1,0)$, $b = (0,1) \in U$ için $a+b = (1,0)+(0,1) = (1,1)$ olup

$1.1 = 1 \neq 0$ olduğundan $a+b \notin U$ dur.

$\Rightarrow U$ toplamaya göre kapalı değildir.

b) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall a = (x,y) \in U$ için $ca = c(x,y) = (cx, cy)$

$a = (x,y) \in U \Rightarrow xy = 0$

$(cx)(cy) = c^2(xy) = c^2 0 = 0 \Rightarrow ca \in U \Rightarrow U$ skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır.